Universität Tübingen
Fachbereich Mathematik
D. Agostini, C. Nollau

Geometrie
WS 2024/25

Blatt 11

Die Lösungen sollten auf URM hochgeladen werden. Abgabetermin: 21.01, 16:00.
Bitte begründen Sie Ihre Lösungen und zeigen Sie Ihre Argumentation auf.
Bitte notieren Sie Ihren Namen und Ihre Immatrikulationsnummer an. Wenn Sie die Aufgaben in einer Gruppe einreichen, reicht es aus, wenn eine Person die Aufgaben für die ganze Gruppe hochlädt.

Aufgabe 11.1 (5 + 5 Punkte)

(i) Berechnen Sie das Doppelverhältnis der folgenden Tupeln in $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$:

$$(1, i; 2+i, 2), \qquad (20, 8+12i; \infty, 10+10i), \qquad (1, i; 2+i, 1+2i)$$

(ii) Entscheiden Sie für jede der Tupeln in (i), ob sie in einem verallgemeinerten Kreis enthalten sind, und wenn ja, finden Sie den verallgemeinerten Kreis.

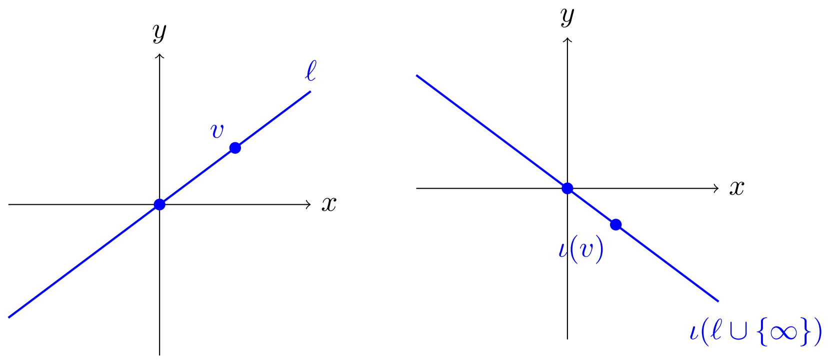
Aufgabe 11.2 (10 Punkte) Seien $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ drei paarweise verschiedene Punkte, die nicht auf einer gemeinsamen reellen Linie liegen. Sei auch $f \in \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \to \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ die einzige Möbius-Transformation, so dass $f(z_1) = \infty, f(z_2) = 0, f(z_3) = 1$. Zeigen Sie, dass $f^{-1}(\mathbb{R} \cup \{\infty\})$ der einzige reelle Kreis ist, der z_1, z_2, z_3 enthält.

(***Anmerkung**: Die Tatsache, dass drei nicht kollineare Punkte in einem einzigen gemeinsamen Kreis enthalten sind, kann **nicht** verwendet werden. Das Ziel dieser Übung ist es, diese Tatsache durch die Eigenschäfte Möbius-Transformationen zu beweisen.*)

Aufgabe 11.3 (2 + 5 + 5 + 8 Punkte) Wir betrachten die Bilder der verallgemeinerten Kreise durch die Inversion $\iota\colon \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \to \mathbb{P}^1(\mathbb{C}), \iota(z) = \frac{1}{z}$:

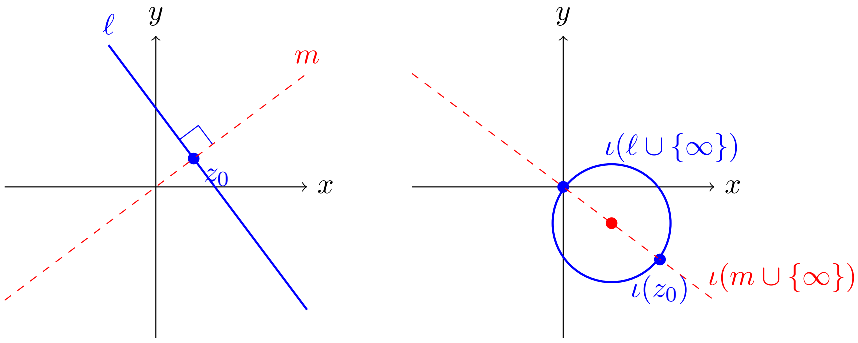
(i) Sei $\ell = \{tv \,|\, t \in \mathbb{R}\}$ eine reelle Gerade so dass $0 \in \ell$, mit $v \in \mathbb{C}^\times$, und sei $\ell' = \{s \cdot \iota(v) \,|\, s \in \mathbb{R}\}$. Zeigen Sie, dass

$$\iota(\ell \cup \{\infty\}) = \ell' \cup \{\infty\}.$$



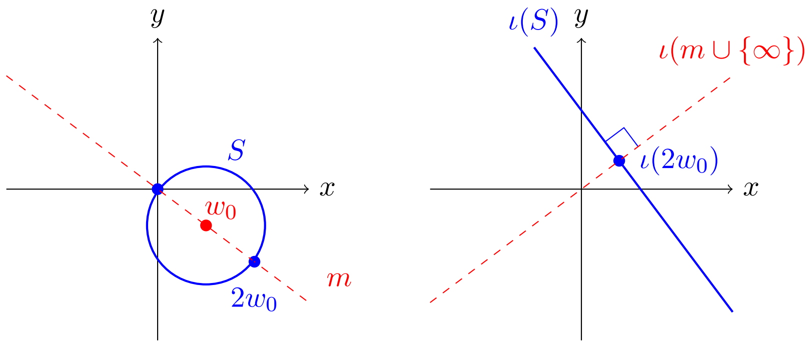
(ii) Sei ℓ eine reelle Gerade so dass $0 \notin \ell$, und sei $z_0 \in \ell$, so dass ℓ und die reelle Gerade m durch 0 und z_0 orthogonal sind. Zeigen Sie, dass $\iota(\ell \cup \{\infty\})$ ein Kreis mit 0 und $\iota(z_0)$ als Endpunkten eines Durchmessers ist:

$$\iota(\ell \cup \infty) = S_{\frac{1}{2}\iota(z_0), \frac{1}{2}|\iota(z_0)|}$$



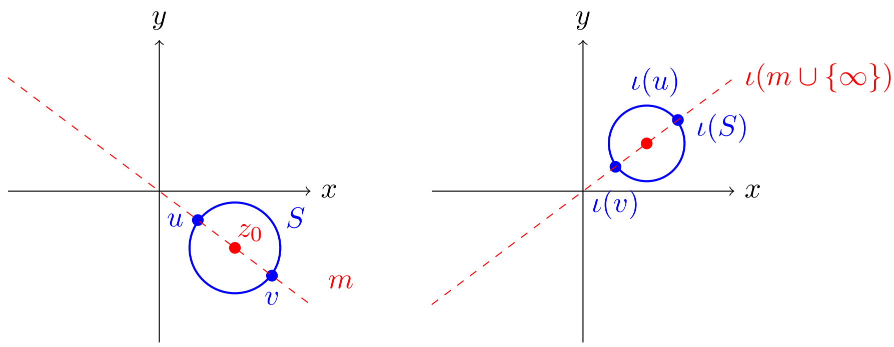
(iii) Sei $S = S_{w_0,|w_0|}$ ein reeller Kreis so dass $0 \in S$, und sei m die reelle Gerade durch 0 und dem Mittelpunkt w_0, so dass $m \cap S = \{0, 2 \cdot w_0\}$. Sei auch $\ell \subseteq \mathbb{C}$ die einzige reelle Gerade durch $\iota(2w_0)$ und orthogonal zu $\iota(m)$. Zeigen Sie, dass

$$\iota(S) = \ell \cup \{\infty\}$$



(iv) Sei $S = S_{z_0,r}$ ein reeller Kreis, so dass $0 \notin S$. Sei m eine reelle Gerade durch 0 und z_0 (m ist eindeutig, falls $z_0 \neq 0$) und seien $\{u, v\} = m \cap S$. Zeigen Sie, dass $\iota(S)$ ein Kreis mit $\iota(u), \iota(v)$ als Endpunkte eines Durchmessers ist:

$$\iota(S) = S_{\frac{1}{2}(\iota(u)+\iota(v)),\frac{1}{2}|\iota(u)-\iota(v)|}$$



(***Anmerkung:*** *Das Theorem, dass die Inversion orthogonale verallgemeinerte Kreise in orthogonale verallgemeinerte Kreise überführt, kann* ***nicht*** *verwendet werden. Der Grund dafür ist, dass diese Übung für den Beweis dieses Satzes verwendet wurde. Wenn Sie möchten, können Sie trotzdem das Ergebnis verwenden, dass die Umkehrung verallgemeinerte Kreise in verallgemeinerte Kreise umwandelt.*)